

Sobre Sistemas Controlables con Control Positivo

Martín E. Frías A., Fernando Verduzco G.*, Horacio Leyva C., F. Armando Carrillo N.

Depto. de Matemáticas. Universidad de Sonora

Av. Rosales y Transversal, s/n,

Hermosillo, Sonora, México, CP 83000.

eduardo@gauss.mat.uson.mx,

verduzco@gauss.mat.uson.mx,

hleyva@gauss.mat.uson.mx,

carrillo@gauss.mat.uson.mx

24 de Septiembre de 2004

Resumen

Presentamos una caracterización de sistemas controlables con control positivo (CCP), para los casos en que su representación matricial sea un bloque de Jordan real. En los resultados obtenidos se hace especial énfasis en el número mínimo de controles necesarios para lograr la controlabilidad.

Palabras clave: Controlabilidad, control positivo, bloques de Jordan.

1. Introducción

En los últimos años podemos observar un gran interés en el estudio de los sistemas CCP. La restricción en signo para la entrada es natural en muchas aplicaciones. En [5] se presenta el siguiente problema: ¿puede el péndulo llevarse a un punto de equilibrio estable mediante la aplicación de una fuerza continua en una sola dirección? Se demuestra que el sistema es controlable con un control escalar positivo. En [4] se presenta una realimentación acotada y positiva que estabiliza este problema.

El problema de estabilización es semejante al de controlabilidad. En [6] se caracterizan los sistemas no lineales que son localmente estabilizables mediante controles positivos. En [3] se establecen condiciones necesarias y suficientes para determinar la controlabilidad local con control positivo en sistemas lineales donde la entrada de control se modela en forma general. En [4] se considera el caso de sistemas lineales CCP con valores propios complejos, para diseñar un

estabilizador global positivo. En [7] se presenta un ejemplo para mostrar que no es trivial la conexión entre el problema de control con signo restringido y el no-restringido.

En este trabajo presentamos una caracterización de los sistemas CCP para tres casos en particular y de acuerdo al número mínimo de controles necesarios. Esta caracterización es útil para el planteamiento de futuros objetivos, como el diseño de funciones de realimentación para la estabilización global de sistemas lineales más generales.

2. Planteamiento del Problema

Considere el sistema lineal

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (1)$$

con $x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, y el parámetro de control u está restringido a tomar valores en el cono $U = \mathbb{R}_+^m$. Debido a esta restricción de no-negatividad, diremos que el control es positivo.

El siguiente resultado, demostrado en [1], da una caracterización de los sistemas CCP,

Teorema 1 *El sistema (1) es CCP si y sólo si*

- La matriz de controlabilidad $C = (B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B)$ tiene rango n ,*
- No existe vector propio real v de A^T que satisfaga que el producto escalar*

$$v \cdot Bu \leq 0$$

para todo $u \in \mathbb{R}_+^m$.

*Dirigir correspondencia a: UNISON, Av. Rosales y Transversal, s/n. Hermosillo, Sonora. Tel. (662)259-2155, Fax: (662)259-2219. Correo-e: verduzco@gauss.mat.uson.mx

De todo el conjunto de sistemas CCP, estudiaremos aquellos en que la matriz A tiene una forma muy particular, para luego establecer condiciones necesarias y suficientes sobre la matriz B para asegurar la controlabilidad con control positivo. Analizaremos los siguientes tres casos:

- (i) un valor propio real repetido en forma diagonal

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & \lambda & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda \end{pmatrix} \quad (2)$$

- (ii) un valor propio real repetido

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix} \quad (3)$$

- (iii) valores propios reales diferentes

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad (4)$$

3. Resultados Principales

En esta sección damos condiciones necesarias y suficientes sobre la matriz B , para asegurar la controlabilidad con control positivo, para los casos en que la matriz A es de la forma (2), (3) y (4). En cada una de las demostraciones usamos el teorema 1 debido a Brammer.

Teorema 2 (i) El sistema de control $\dot{x} = Ax + Bu$, con A de la forma (2), es positivamente controlable con $n + 1$ controles si y sólo si B es de rango n y existe una columna b_k de B tal que

$$b_k = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n+1} c_j b_j, \quad \text{con } c_j < 0$$

(ii) El sistema de control $\dot{x} = Ax + Bu$, con A de la forma (2), no es positivamente controlable con n o menos controles.

Demostración:

Probemos la primera parte. $\Rightarrow$) Obsérvese que

$$A^k B = \lambda^k B,$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} rg(C) &= rg(B A B \cdots A^{n-1} B) \\ &= rg(B \lambda B \cdots \lambda^{n-1} B) \\ &= rg(B), \end{aligned} \quad (5)$$

luego entonces, $rg(B) = n$. Como B tiene rango n , sin pérdida de generalidad, podemos suponer que las primeras n columnas de B son linealmente independientes, luego entonces

$$b_{n+1} = \sum_{j=1}^n c_j b_j. \quad (6)$$

Probaremos por contradicción, que b_{n+1} es una combinación lineal negativa del resto de las columnas de B . Supongamos que existe un c_j no negativo en (6). Sin pérdida de generalidad supongamos que $c_n \geq 0$. Sea W el espacio generado por la colección $\{b_1, \dots, b_{n-1}\}$, y sea $v \in \mathbb{R}^n$ un vector no nulo en el espacio ortogonal de W tal que $v \cdot b_n \neq 0$, luego entonces $v \cdot b_i = 0$ para $i = 1, \dots, n-1$. Ahora bien,

$$\begin{aligned} v \cdot Bu &= v \cdot \left(\sum_{j=1}^{n+1} u_j b_j \right) \\ &= \sum_{j=1}^{n+1} u_j (v \cdot b_j) \\ &= u_n (v \cdot b_n) + u_{n+1} (v \cdot b_{n+1}) \\ &= u_n (v \cdot b_n) + u_{n+1} \left(v \cdot \left(\sum_{j=1}^n c_j b_j \right) \right) \\ &= u_n (v \cdot b_n) + u_{n+1} (v \cdot c_n b_n) \\ &= (u_n + c_n u_{n+1}) v \cdot b_n. \end{aligned}$$

Por la forma de A , todo vector en $\mathbb{R}^n$ es vector propio de A^T , luego entonces, hemos encontrado un vector propio real v de A^T tal que $v \cdot Bu$ no cambia de signo para todo u , lo cual es una contradicción, pues nuestro sistema es positivamente controlable.

$\Leftarrow$) De la ecuación (5) se sigue que $rg(C) = n$. Falta probar la segunda condición de controlabilidad positiva. Sin pérdida de generalidad, supongamos que

$$b_{n+1} = \sum_{j=1}^n c_j b_j,$$

con $c_j < 0$ para toda $j = 1, \dots, n$. Ahora bien, la colección $\{b_1, \dots, b_n\}$ es linealmente independiente,

pues $rg(B) = n$. Sea $v \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$\begin{aligned} v \cdot Bu &= v \cdot \left(\sum_{j=1}^{n+1} u_j b_j \right) \\ &= v \cdot \left(\sum_{j=1}^n u_j b_j + u_{n+1} b_{n+1} \right) \\ &= v \cdot \left(\sum_{j=1}^n u_j b_j + u_{n+1} \sum_{j=1}^n c_j b_j \right) \\ &= v \cdot \left(\sum_{j=1}^n (u_j + c_j u_{n+1}) b_j \right) \\ &= \sum_{j=1}^n (u_j + c_j u_{n+1}) v \cdot b_j. \end{aligned}$$

Como la colección $\{b_1, \dots, b_n\}$ es linealmente independiente, existe b_k en la colección tal que $v \cdot b_k \neq 0$. Diseñamos u tal que $u_j = -c_j u_{n+1}$ para $j \neq k$ y $u_k \neq -c_k u_{n+1}$. Esto nos permite diseñar controles tales que $v \cdot Bu$ tenga cualquier signo. Por lo tanto, no existe un vector propio de A^T que mantenga fijo el signo de $v \cdot Bu$ para todo u . Esto termina la prueba de la primera parte.

Probemos ahora la segunda parte. Sabemos que $rg(\mathcal{C}) = rg(B)$, por lo tanto, para que el sistema sea positivamente controlable, necesariamente $rg(B) = n$, es decir, ocupamos al menos n controles. Probaremos que no es suficiente con n tampoco. Sea W el espacio generado por las primeras $n-1$ columnas de B , y sea $v \in \mathbb{R}^n$ tal que v es ortogonal a W , es decir, $v \cdot b_j = 0$, para $j = 1, \dots, n-1$, y $v \cdot b_n \neq 0$, luego entonces

$$\begin{aligned} v \cdot Bu &= v \cdot \left(\sum_{j=1}^n u_j b_j \right) \\ &= u_n v \cdot b_n, \end{aligned}$$

el cual no cambia de signo para todo u . Esto termina la prueba. $\square$

Teorema 3 *El sistema de control $\dot{x} = Ax + Bu$, con A de la forma (3), es controlable con control positivo si y sólo si en el último renglón de B hay dos entradas de signos opuestos.*

Demostración:

$\Rightarrow$) Lo haremos por contradicción. Supongamos que todas las entradas del último renglón de B tienen el mismo signo. Para este caso los vectores propios reales de A^T son todos aquellos vectores cuya última entrada es diferente de cero y el resto son cero. Luego

entonces, si $b_j = (b_{1j}, \dots, b_{nj})$ son las columnas de B y $v = (0, \dots, 0, 1)^T$, entonces

$$\begin{aligned} v \cdot Bu &= v \cdot \sum_{j=1}^n u_j b_j \\ &= \sum_{j=1}^n u_j (v \cdot b_j) \\ &= \sum_{j=1}^n u_j b_{nj}, \end{aligned}$$

el cual no cambia de signo para toda u , lo cual es una contradicción, pues el sistema es positivamente controlable.

$\Leftarrow$) Probaremos primero que $rg(\mathcal{C}) = n$. Por hipótesis, existen al menos dos columnas de B cuya última entrada es diferente de cero, supongamos, sin pérdida de generalidad, que b_1 una de ellas. Probaremos que las siguientes n columnas de $\mathcal{C}$ son linealmente independientes: $\{b_1, Ab_1, \dots, A^{n-1}b_1\}$. Observemos primero que $A = \lambda I + N$, donde I es la matriz identidad en $\mathbb{R}^{n \times n}$ y N es una matriz nilpotente con las siguientes propiedades:

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \dots,$$

$$N^{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ y } N^n = 0.$$

Ahora bien, del teorema del binomio de Newton,

$$A^k = (\lambda I + N)^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \lambda^{k-j} N^j, \quad (7)$$

donde $\binom{k}{j} = \frac{k!}{j!(k-j)!}$. Supongamos que

$$\sum_{i=1}^n c_i A^{i-1} b_1 = 0$$

para algunas constantes c_i . Pero

$$\sum_{i=1}^n c_i A^{i-1} b_1 = \left(\sum_{i=1}^n c_i A^{i-1} \right) b_1 = 0,$$

pero la última entrada de b_1 es diferente de cero, por lo tanto,

$$\sum_{i=1}^n c_i A^{i-1} = 0.$$

Ahora bien, usando (7) y cambiando el orden en las sumas, obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^n c_i A^{i-1} \\ &= \sum_{i=1}^n c_i \left(\sum_{j=0}^{i-1} \binom{i-1}{j} \lambda^{i-1-j} N^j \right) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} N^j \left(\sum_{i=j+1}^n \binom{i-1}{j} c_i \lambda^{i-1-j} \right) \end{aligned}$$

Por las propiedades enunciadas arriba de la matriz nilpotente N , se sigue que

$$\sum_{i=j+1}^n \binom{i-1}{j} c_i \lambda^{i-1-j} = 0$$

para toda $j = 0, \dots, n-1$. Para $j = n-1$ obtenemos la ecuación

$$c_n = 0,$$

para $j = n-2$ obtenemos la ecuación

$$c_{n-1} + (n-1)c_n \lambda = 0,$$

pero como $c_n = 0$, entonces $c_{n-1} = 0$; siguiendo con este proceso obtenemos que $c_i = 0$ para toda $i = 1, \dots, n$.

Probaremos ahora la segunda condición de controlabilidad. Sea $v = (0, \dots, 0, v_0)$ un vector propio de A^T , luego entonces

$$\begin{aligned} v \cdot Bu &= v \cdot \sum_{j=1}^n u_j b_j \\ &= \sum_{j=1}^n u_j (v \cdot b_j) \\ &= v_0 \sum_{j=1}^n u_j b_{nj}. \end{aligned}$$

Sabemos que existen j_1 y j_2 tales que b_{nj_1} y b_{nj_2} tienen signos opuestos, por lo tanto, esto nos permite

diseñar controles que hagan que $v \cdot Bu$ posea el signo que queramos, satisfaciéndose entonces la segunda condición de controlabilidad. Esto termina la prueba. $\square$

Observación 1 En este caso sólo son necesarios dos controles para conseguir la controlabilidad del sistema (1)

Lema 4 Considere el sistema de control $\dot{x} = Ax + Bu$ con A de la forma (4). Si la matriz $B = \{b_1, \dots, b_m\}$ es tal que b_j posee todas sus entradas diferentes de cero, entonces la colección $\{b_j, Ab_j, \dots, A^{n-1}b_j\}$ es linealmente independiente.

Demostración:

Supongamos que

$$c_1 b_j + c_2 A b_j + \dots + c_n A^{n-1} b_j = 0,$$

debemos probar entonces que $c_i = 0$ para toda $i = 1, \dots, n$. Considere el polinomio de grado $n-1$,

$$f(x) = c_1 + c_2 x + \dots + c_n x^{n-1},$$

y sea $b_j = (b_{1j}, \dots, b_{nj})^T$. Obsérvese que

$$A^k b_j = (\lambda_1^k b_{1j}, \dots, \lambda_n^k b_{nj})^T,$$

luego entonces

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n c_k A^{k-1} b_j &= 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n c_k \lambda_i^{k-1} b_{ij} &= 0, \text{ para } i = 1, \dots, n \\ \Leftrightarrow b_{ij} \left(\sum_{k=1}^n c_k \lambda_i^{k-1} \right) &= 0, \text{ para } i = 1, \dots, n \\ \Leftrightarrow b_{ij} f(\lambda_i) &= 0, \text{ para } i = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

lo que implica que $f(x)$ posee n soluciones diferentes, pero $f(x)$ es un polinomio de grado $n-1$, por lo tanto, del teorema fundamental del álgebra, $f(x) \equiv 0$, es decir,

$$c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0.$$

$\square$

Teorema 5 El sistema de control $\dot{x} = Ax + Bu$, con A de la forma (4), es controlable con control positivo si y sólo si en cada renglón de B hay dos entradas de signos opuestos.

Demostración:

$\Rightarrow$) Lo haremos por contradicción. Supongamos que el sistema es controlable con control positivo, y que existe un renglón de B , el k -ésimo, con todas sus entradas del mismo signo. Probaremos que existe un vector propio real v de A^T , tal que $v \cdot Bu$ no cambia de signo para todo control positivo $u \in \mathbb{R}_+^m$. Por la forma de la matriz A , los vectores propios

de A^T son todos aquellos vectores que coinciden con las direcciones de los ejes coordenados. Sean $R_k = (r_{k1}, \dots, r_{km})$ el renglón k -ésimo de la matriz B y v el vector propio de A^T con un uno en la posición k -ésima y cero en el resto. Luego entonces,

$$v \cdot Bu = \sum_{i=1}^m r_{ki} u_i$$

no cambia de signo, pues $u_i > 0$ y las r_{ki} son del mismo signo para toda $i = 1, \dots, m$.

⇐) Por lo hecho arriba, es claro que es posible encontrar un vector propio de A^T tal que $v \cdot Bu$ cambie de signo para distintos controles u . Probemos que el rango de la matriz de controlabilidad es n . Sea $B = \{b_1, \dots, b_m\}$. Si B posee una columna con todas sus entradas diferentes de cero, del lema 4 se sigue lo deseado. Supongamos que B no posee columnas con todas sus entradas diferentes de cero. Seleccionemos r columnas de B , con $r > 1$ de la siguiente forma: sea k_1 el número de entradas diferentes de cero en b_1 , sea k_2 el número de entradas de b_2 que son diferentes de cero, y que son cero en las respectivas entradas de b_1 , en general, sea k_j el número de entradas de b_j que son diferentes de cero, y que además son cero en las respectivas entradas de $b_1, b_2, \dots, b_{j-1}$. Tenemos entonces, por definición, que existe r tal que $k_j = 0$ para toda $j > r$. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $k_j \neq 0$ para $j \leq r$. Obsérvese que $n - k_1$ es el número de ceros de la primera columna, $n - k_1 - k_2$ representa el número de ceros en la segunda columna y que son cero en la primera columna, así hasta que terminamos, es decir, hasta la columna b_r , por lo que $n - k_1 - \dots - k_r = 0$, es decir $k_1 + \dots + k_r = n$. Considere la siguiente colección de n columnas de la matriz de controlabilidad: $b_1, Ab_1, \dots, A^{k_1-1}b_1, b_2, Ab_2, \dots, A^{k_2-1}b_2, \dots, b_r, Ab_r, \dots, A^{k_r-1}b_r$, probaremos que la colección es linealmente independiente. Supongamos que

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{k_i} c_{ij} A^{j-1} b_i = 0 \quad (8)$$

para algunas constantes c_{ij} . Debemos probar que $c_{ij} = 0$ para toda i, j . Sabemos que

$$A^{j-1} b_i = (\lambda_1^{j-1} b_{1i}, \dots, \lambda_n^{j-1} b_{ni})^T,$$

luego entonces, la ecuación vectorial (8) es equivalente al siguiente sistema de n ecuaciones,

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{k_i} c_{ij} \lambda_1^{j-1} b_{1i} = 0 \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{k_i} c_{ij} \lambda_n^{j-1} b_{ni} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^r b_{1i} \left(\sum_{j=1}^{k_i} c_{ij} \lambda_1^{j-1} \right) = 0 \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^r b_{ni} \left(\sum_{j=1}^{k_i} c_{ij} \lambda_n^{j-1} \right) = 0 \end{cases} \quad (9)$$

Por la forma en que se escogieron las columnas $b_1, \dots, b_r$, es posible descomponer el sistema anterior, en r subsistemas con $k_1, \dots, k_r$ ecuaciones cada uno. Hagamos una partición del conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$ en los siguientes subconjuntos

$$\{l_1^1, \dots, l_{k_1}^1\} \cup \{l_1^2, \dots, l_{k_2}^2\} \cup \dots \cup \{l_1^r, \dots, l_{k_r}^r\},$$

donde l_j^i es el número de renglón en donde su i -ésima entrada es diferente de cero y todas sus anteriores entradas son cero, para $1 \leq j \leq k_i$. Esto nos permite re-escribir el sistema (9) en la siguiente forma

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^r b_{l_s^1, i} \left(\sum_{j=1}^{k_i} c_{ij} \lambda_{l_s^1}^{j-1} \right) = 0 & s = 1, \dots, k_1 \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^r b_{l_s^{r-1}, i} \left(\sum_{j=1}^{k_i} c_{ij} \lambda_{l_s^{r-1}}^{j-1} \right) = 0 & s = 1, \dots, k_{r-1} \\ \sum_{i=1}^r b_{l_s^r, i} \left(\sum_{j=1}^{k_i} c_{ij} \lambda_{l_s^r}^{j-1} \right) = 0 & s = 1, \dots, k_r \end{cases}$$

Considere el último subsistema. De nuevo por construcción,

$$\begin{aligned} b_{l_s^r, r} &\neq 0 \text{ para toda } s = 1, \dots, k_r \\ b_{l_s^r, i} &= 0 \text{ para } i = 1, \dots, r-1, \end{aligned}$$

luego entonces,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^r b_{l_s^r, i} \left(\sum_{j=1}^{k_i} c_{ij} \lambda_{l_s^r}^{j-1} \right) &= 0, \quad s = 1, \dots, k_r \Leftrightarrow \\ b_{l_s^r, r} \left(\sum_{j=1}^{k_r} c_{rj} \lambda_{l_s^r}^{j-1} \right) &= 0, \quad s = 1, \dots, k_r. \end{aligned} \quad (10)$$

Sea

$$f_r(x) = \sum_{j=1}^{k_r} c_{rj} x^{j-1}$$

un polinomio de grado $k_r - 1$. De (10) concluimos que $f_r(\lambda_{l_s^r}) = 0$ para $s = 1, \dots, k_r$, lo que implica que $f_r(x) \equiv 0$, es decir, $c_{rj} = 0$, para $j = 1, \dots, k_r$. Consideremos ahora el penúltimo subsistema,

$$\sum_{i=1}^{r-1} b_{l_s^{r-1}, i} \left(\sum_{j=1}^{k_i} c_{ij} \lambda_{l_s^{r-1}}^{j-1} \right) = 0, \quad s = 1, \dots, k_{r-1},$$

en donde hemos hecho $c_{rj} = 0$, para $j = 1, \dots, k_r$. Por construcción,

$$\begin{aligned} b_{l_s^{r-1}, r-1} &\neq 0, \text{ para toda } s = 1, \dots, k_{r-1}, \\ b_{l_s^{r-1}, i} &= 0, \text{ para cada } i = 1, \dots, r-2, \end{aligned}$$

por lo que tenemos que

$$\sum_{i=1}^{r-1} b_{l_s^{r-1}, i} \left(\sum_{j=1}^{k_i} c_{ij} \lambda_{l_s^{r-1}}^{j-1} \right) = 0, \Leftrightarrow$$

$$b_{l_s^{r-1}, r-1} \left(\sum_{j=1}^{k_{r-1}} c_{r-1, j} \lambda_{l_s^{r-1}}^{j-1} \right) = 0, \quad (11)$$

para $s = 1, \dots, k_{r-1}$. Sea

$$f_{r-1}(x) = \sum_{j=1}^{k_{r-1}} c_{r-1, j} x^{j-1}$$

un polinomio de grado $k_{r-1} - 1$. De (11) concluimos que $f_{r-1}(x)$ posee k_{r-1} soluciones, luego entonces $c_{r-1, j} = 0$ para $j = 1, \dots, k_{r-1}$. Continuando de esta forma, concluimos que $c_{ij} = 0$ para toda i, j . $\square$

Observación 2 En este caso pueden existir sistemas que se puedan controlar desde con dos hasta con $2n$ controles.

4. Conclusiones

Hemos caracterizado sistemas CCP para los casos en que la matriz A tiene valores propios reales y está dada en las formas (2), (3) y (4). Esta caracterización permite establecer el mínimo número de controles necesarios para conseguir la controlabilidad del sistema. En [8], Patrick De Leenheer y Dirk Aeyels introducen nuevos conceptos y reconocen nuevos problemas para los sistemas lineales con control positivo. Estimamos que nuestra caracterización de controlabilidad permite abordar algunos de estos problemas, propios de los sistemas lineales positivos.

Referencias

- [1] R.F. Brammer. *Controllability in linear autonomous systems with positive controllers*. SIAM J. Control, 10. 1972.
- [2] T. Kailath. *Linear Systems*. Prentice-Hall. 1980.
- [3] V.I. Korobov. *A geometrical criterion for local controllability of dynamical systems with restrictions on controls*. Diff. Uravn., 15, pp 1592-1599. 1979.
- [4] H. Leyva, F.A. Carrillo. *Estabilización global de sistemas lineales con control positivo*. XI Congreso Latinoamericano de Control Automático. La Habana Cuba. 2004.
- [5] H. Saperstone, J.A. Yorke. *Controllability of linear oscillatory systems using positive controls*. SIAM J. Control, 9. 1971.
- [6] G.V. Smirnov. *Global guidance stabilization of linear control systems*. Int. J. Robust Nonlinear Control, 9, pp 585-598. 1999.
- [7] W.P.M.H. Heemels, S.J.L. Van Eijnndhoven, and A.A. Stoorvogel. *Linear quadratic regulator problem with positive controls*. Int. J. Control, 1998, Vol. 70, No. 4, pp 551-578.
- [8] Patrick De Leenheer, Dirk Aeyel. *Stabilization of positive linear systems*. Systems & Control, Letters 44 (2001), pp 259-271.